**Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике**

Обучающийся должен **знать:**

* значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
* основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
* основы интегрального и дифференциального исчисления.

Обучающийся должен **уметь:**

* решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

**Краткое содержание теоретического материала**

В математике очень часто приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции. Так, задача о нахождении пути *s(t)* по заданной скорости *v(t)* сводится к решению уравнения *s****'****(t)= v(t),* где *v(t)* заданная функция, а *s(t)* искомая функция.

Например, если *v(t)=3-4t,* то для нахождения *s(t)*, нужно решить уравнение *s****'****(t)= 3-4t.*

Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют **дифференциальными уравнениями.**

**Дифференциальным уравнением** называют уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.



**Решением дифференциального уравнения** называется такая дифференцируемая функция у = ϕ(х), которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в верное равенство. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием.

**Порядок дифференциального уравнения** – наибольший порядок производных, входящих в него.

График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой этого уравнения**.

Обыкновенные дифференциальные уравнения имеют большое прикладное значение – они широко используются в механике, астрономии, физике и других науках. Такое широкое распространение дифференциальных уравнений в естествознании объясняется тем, что многие явления и процессы, происходящие в природе, количественно описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В медицинских приложениях дифференциальные уравнения, например, используются:

* Для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиография), определения вязкости крови других параметров гемодинамики;
* Для описания медико-биологических приложений ультразвука: эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиография;
* Для описания процессов физиологической акустики, которая изучает устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животных.

Например, решить дифференциальное уравнение *у****'=****х+1*

Требуется найти функцию *у(х)* производная которой равна *х+1,* т.е. найти первообразную функции *х+1*. По правилам нахождения первообразных получаем:

*у= С,* где С – произвольная постоянная

*Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной.*

Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется

Например, найти решение дифференциального уравнения *у****'=****cos x* , удовлетворяющее условию *у(0)=2*

Все решения этого уравнения записываются формулой

*у(х)=sin x+С (***общее решение** уравнения)

Из условия *у(0)=2* находим

*sin 0+C=2;* откуда *C=2*

Поэтому *у(х)=sin x+2* будет являться **частным решением** уравнения.

Решение многих биологических, физических, технических и других практических задач сводится к решению дифференциального уравнения

*у****'=****ky, г*де *k* – заданное число.

Решениями этого уравнения являются функции *у=Сеkx, г*де *С* – постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, скорость *m****'*** *(t)* размножения бактерий связана с массой *m (t)* бактерий в момент времени *t* уравнением

*m****'*** *(t)= k m (t),* где *k* – положительное число, зависящее от вида бактерий и внешних условий.

Постоянную *С* можно найти, например, из условия, что в момент *t=0* масса бактерий *m0* известна. Тогда

*m(0)=m0= Сеk·0=C,* и поэтому

*m (t)= m0 еkt*

Другим примером применения уравнения *у****'=****ky* является задача о радиоактивном распаде вещества.

Физическое свойство радиоактивного вещества – свойство распада – обычно формулируют в виде “Закона радиоактивного распада”:

*Скорость радиоактивного распада вещества пропорциональна количеству этого вещества.*

Так как, в согласии с законом радиоактивного распада, масса вещества меняется со временем, то обозначим её *m (t), (t –* время). Если *m****'*** *(t)*  - скорость радиоактивного распада в момент времени *t,* то

*m****'*** *(t)= - k m (t),* где *k* – постоянная, зависящая от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции *m (t)= Се-kx,*

Если в момент времени *t* масса равна *m0,* то *С=m0,* и поэтому   
*m (t)= m0 е-kt*

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т.е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть Т – период полураспада, тогда из равенства *m (t)= m0 е-kt*

При *t* = Т получаем , откуда , поэтому формула запишется так: *m (t)= m0 *

Дифференциальные уравнения первого порядка вида *у****'=****f(x) g(y)*

называются уравнениями с **разделяющимися** переменными.

Для того, чтобы найти решения уравнения с разделяющимися переменными, необходимо обе части уравнения умножить (или разделить) на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входила только переменная *х*, а в другую только переменная *у,* а затем проинтегрировать обе части уравнения.

Записывая данное уравнение в виде

,

получаем  и 

Например:

Решить уравнение: 1) *у****'=****cos x, 2) у****'****=у*

*у****'=****cos x у****'****=у*

 

*dy=cos x dx* 

* =*

*y=sin x + C lny= x+c*

*y=Cex*

Проверим, что следующие функции являются решениями дифференциальных уравнений:

а) *х у****'*** *– у = 0, у= Сх*

Решение:

*у****'****=(Сх)****'=****С*

Подставим в уравнение  *у= Сх* и *у****'****=С*

*х у****'*** *– у = 0*

*х С**– Сх = 0*

*0=0, з*начит *у= Сх –* решение уравнения  *х у****'*** *– у = 0*

б) *у****''****– у****'+**** = 0, у=С1 х + С2 х2*

Решение:

*у****'****=(С1 х + С2 х2)****' =*** *С1  + 2С2 х*

*у****''=*** *(С1  + 2С2 х)****' =*** *2С2*

*2С2 -  (С1  + 2С2 х) + ( С1 х + С2 х2)=0*

*2С2 -  С1 - 4 С2 +  С1 + 2С2=0*

*0=0*

значит *у=С1 х + С2 х2 -* решение уравнения *у****''****– у****'+**** = 0*

**Алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами**

1. Записать дифференциальное уравнение в виде: *y" + py' +qy = 0*.

2. Составить его характеристическое уравнение, обозначив *y"* через *r2*, *y'*  через *r*, *y*через 1:http://festival.1september.ru/articles/527195/image163.gif *r2 + pr +q = 0*

3.Вычислить дискриминант  *D = p2 -4q* и найти корни характеристического уравнения; при этом если:

а) *D > 0*; следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня *r1≠r2*. Общее решение дифференциального уравнения выражается в виде *y=C1 erx+C2 erx* ,

где *C1* и *C2* - произвольные постоянные.

б) *D = 0;* следовательно, характеристическое уравнение имеет равные действительные корни *r1=r2=r.* Общее решение дифференциального уравнения выражается в виде

*y=erx (C1+C2x), или y=C1erx+C2xerx*

в) *D < 0;* следовательно, характеристическое уравнение имеет комплексные корни, *r1=α+βi, r2=α–βi* Общее решение дифференциального уравнения выражается, в виде

*y=ααx (C1cosβx+C2sinβx)*

**Образец решения:**

*Пример.* Решите дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами *y*′′–*у*′–6*у* = 0, найдите частное решение, если *у*(0)=3, *у*′(0)=4

*Решение:* составим характеристическое уравнение *r2–r–6=0*,

D = (–1)2–4·(–6) = 25

r1=3, r2=–2

Т.к. корни характеристического уравнения не равны, запишем ответ в виде

*y(x)*=C1*e*3x+C2*e*–2x

– **общее решение** дифференциального уравнения.

По условию *у*(0)=3, т.е.(подставляем в общее решение)

3=C1+C2,

*у*′(*x*)= 3C1*e*3x–2C2*e*–2x , *у*′(0)=4. 4=3C1–2C2

Составим и решим систему уравнений:

Откуда c1=2, c2=1

**Частное решение** имеет вид *y(x)*=2*e*3x+*e*–2x

**Вопросы к теме**

* 1. Какое уравнение называют дифференциальным уравнением?
  2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
  3. Что является решением дифференциального уравнения?
  4. Что такое общее решение дифференциального уравнения?
  5. Что такое частное решение дифференциального уравнения?
  6. Какое дифференциальное уравнение называют уравнением с разделяющимися переменными?